משרד החינוך

נבחרות ישראל במדעים

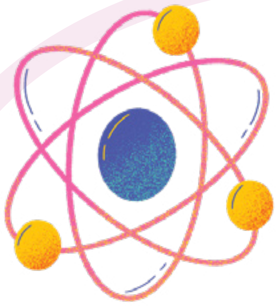
מרכז מדעני העתיד

MAIMONIDES FUND

שער לנבחרות ישראל במדעים

אסטרטגיות חשיבה וחידות נבחרות מתוך מבחני המיון לנבחרות ישראל במדעים

2025



נבחרות ישראל במדעים

נבחרות ישראל במדעים פועלות במיזם משותף של משרד החינוך, מנהל חדשנות וטכנולוגיה ומרכז מדעני העתיד של קרן מיימונידיס. נבחרות המדעים מקדמות את המיומנויות וההישגים של כלל משתתפי ומשתתפות הנבחרות, ומטפחות מצוינות בתחומי הפיזיקה, הכימיה, הביולוגיה, המתמטיקה, והמחשבים. הנבחרות הבוגרות מיועדות לתלמידי החטיבה העליונה. כל נבחרת מונה כ–50 תלמידות ותלמידים מצטיינים בתחומם. הנבחרת מתאמנת במוסד אוניברסיטאי נבחר שנותן חסות אקדמית כוללת על הכשרתה והכנת התלמידות והתלמידים לתחרויות ולאולימפיאדות בינלאומיות במדעים.

נבחרת ישראל הצעירה במדעים מיועדת לתלמידי חטיבת הביניים, המגלים עניין וכישרון יוצא דופן בתחומי המדעים. נבחרת ישראל הצעירה היא קהילה לומדת ומתפתחת של תלמידות ותלמידים מוכשרים, בעלי יכולת למידה גבוהה ועצמאית, התמדה ונחישות, סקרנות ותשוקה גדולה ללמוד ולהעמיק בתחומי המדע והמתמטיקה. הנבחרת מהווה קבוצת עתודה לחמש נבחרות ישראל הבוגרות במדעים, והיא חממת הגידול הטובה ביותר בישראל לנוער מוכשר זה. דרך השתתפות בנבחרת נחשפים התלמידים למגוון רחב של נושאים, שיטות ודרכי חשיבה, המאפשרות להם להעמיק את ידיעותיהם ולשפר את כישוריהם בטרם יגיעו לתיכון.

המיון לנבחרות כולל סדרת מבחנים מורכבת ותחרותית, המעודדת את המשתתפים לחשיבה יצירתית וביקורתית. המבחנים מתמקדים בהבנת תהליכים ופתרון בעיות מתמטיות ומדעיות בדרכים בלתי שגרתיות. המיונים לנבחרת ישראל הצעירה מתקיימים בכיתה ז', ובכל שנה מתקבלים אליה כ-100 תלמידות ותלמידים מכל רחבי הארץ. שלב א' מתקיים באופן מקוון דרך פורטל התלמידים של משרד החינוך. האימונים בנבחרות ישראל כוללים פיתוח חשיבה אולימפית לצד פעילויות חברתיות ופיתוח מיומנויות כמו ניהול זמן, חוסן נפשי, התמודדות והיחלצות ממשברים.

שער לנבחרות ישראל במדעים

חוברת זו מיועדת למורות ולמורים למדעים ולמתמטיקה בחטיבות הביניים ובחטיבה העליונה, המעוניינים לקדם בכיתותיהם תלמידות ותלמידים מצטיינים. מטרת החוברת היא לאפשר למורים ולתלמידים לטעום מתוך תהליך המיון של נבחרות ישראל ולחשוף אותם לאתגרים מחשבתיים ברמה גבוהה. החוברת נבנתה כך שהיא מאפשרת למורים לעבור עם התלמידים על מבחר חידות, תוך התאמה לרמות שונות של מורכבות וקושי, ולפתח חשיבה אולימפית. בכל חידה מופיעים פתרון מלא המפרט את דרך הפתרון, הצעות לרמזים לתלמידים התמקדות באסטרטגיות חשיבה. מורים יכולים לבחור לפעול עם תלמידים על פי רמות קושי, או להתמקד בתחומים ספציפיים בהתאם לתוכנית הלימודים ולהעדפות הכיתה.

טיפ: החידות בחוברת נלקחו מתוך מבחני המיון של הנבחרת הצעירה ומיועדות בעיקר לתלמידי כתה ז'. עם זאת, אסטרטגיות החשיבה ודרכי הפתרון המוצגות כאן, כמו פירוק לבעיות קטנות יותר או התבוננות במקרה קיצוני, רלוונטיים מאוד גם למיונים לנבחרות הבוגרות ולכן מומלץ להמשיך ולהציג תרגילים מתוך החוברת גם לכתות ח' ומעלה.

המלצות לשימוש בחוברת זו

תלמידות ותלמידים המגיעים לנבחרת הצעירה במדעים נדרשים לדעת לפתור שאלות הדורשות ידע ויצירתיות. אלו אינן מיומנויות שמגיעות סתם כך משום מקום; הן דורשות תרגול, סקרנות וחשיפה לדרכי חשיבה מגוונות.

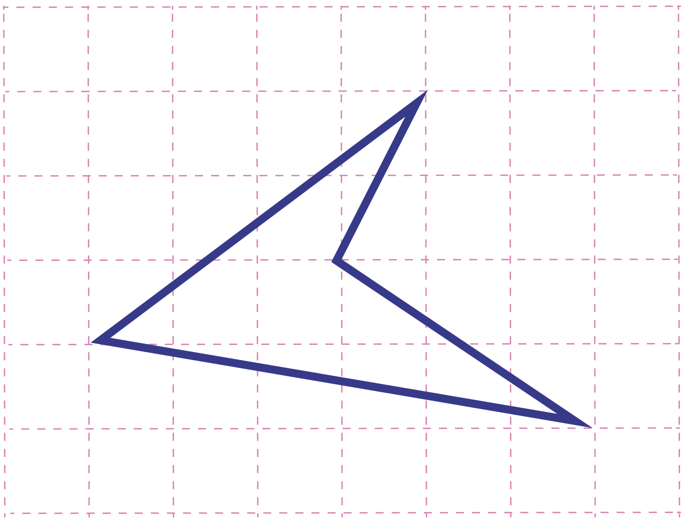
בחוברת זו מוצגות שאלות נבחרות מתוך מבחני המיון של הנבחרת הצעירה מהשנים האחרונות, יחד עם פתרונות, הסברים, והרחבה על הרעיונות המוצגים בהן. אנו מזמינים אתכם ואתכן להשתמש בחומרים הללו כדי לאתגר את תלמידיכם ולחשוף אותם לבעיות מעניינות ולא שגרתיות.

כדי לקיים למידה אפקטיבית, אנו ממליצים להתחיל תמיד במתן זמן לחשיבה עצמאית ולעודד ל"משחק" עם המערכת שמופיעה בבעיה. תלמידים שלא יבלו פרק זמן משמעותי במחשבה על שאלה יתקשו לפתח אינטואיציה לפתרון שלה ושל שאלות נוספות בהמשך. מנגד, חשוב לזהות מתי החשיבה העצמאית מיצתה את עצמה והגיע הזמן לתת רמז או להציג את הפתרון.
הפתרונות בחוברת מוצגים באופן מפורט, ומודגשים בהם רעיונות ועקרונות כלליים שיכולים לשמש ככלי לפתרון חידות ובעיות מאתגרות נוספות. מומלץ להדגיש בדיון את הרעיונות והעקרונות הללו, כדי לאפשר למידה רחבה.
שאלות נוספות ומבחנים לדוגמא עבור כל הנבחרות ניתן למצוא בפורטל נבחרות ישראל במדעים.

טיפ: אין קנס על תשובות שגויות במיונים לנבחרות, לכן מומלץ לענות על כל השאלות במבחן, גם אם לא בטוחים בתשובה!

שאלה 1: חישוב שטחים והתבוננות במשלים

באיור שלפניכם אורך הצלע של כל משבצת הוא יחידה אחת. מצאו את שטח הצורה המודגשת (במידת הצורך, עגלו את תשובתכם לשלם הקרוב ביותר):

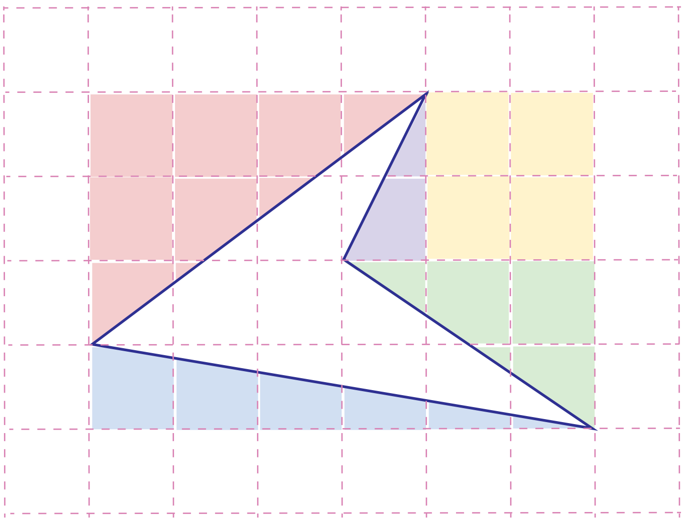


ידע מקדים

יש לוודא שהתלמידים יודעים לחשב שטחים של מלבנים ושל משולשים.

פתרון

שטח הצורה הוא 7. נוסיף לצורה כמה משולשים וריבוע:



הצורה יחד עם כל התוספות היא מלבן בגודל 4 על 6, ששטחו 6•4 = 24. כעת, אם נמצא כמה שטח הוספנו, נוכל לגלות מה היה שטח הצורה המקורית. זה פשוט – הרי משולש ישר זווית הוא חצי מלבן, ולכן שטחו הוא חצי ממכפלת הניצבים שלו. לפיכך:

שטח המשולש האדום – 6 = 3•4/2

שטח המשולש הכחול – 3 = 1•6/2

שטח המשולש הסגול – 1 = 2•1/2

שטח המשולש הירוק – 3 = 2•3/2

שטח הריבוע הצהוב – 4 = 2•2

סך השטח שהוספנו הוא 4+3+1+3+6 = 17, ולכן שטח הצורה המקורית הוא 24-17=7.

הסבר לפתרון

מהי המוטיבציה לפתרון? הצורה שבאיור נראית כמו צורה מורכבת שאנחנו לא יודעים לחשב את השטח שלה. עם זאת, אנחנו כן יודעים לחשב שטחים של צורות פשוטות יותר, כמו מלבנים ומשולשים המיושרים לרשת המשבצות. לכן, נרצה להשתמש בשיטה של פירוק הבעיה הגדולה לבעיות קטנות יותר.

פירוק לבעיות קטנות יותר ("הפרד ומשול")

פעמים רבות אנו נתקלים בבעיות מורכבות שאיננו יודעים לפתור ישירות, על אף שאנחנו יודעים לפתור בעיות פשוטות יותר מאותו הסוג. במקרה כזה, נוכל לחפש דרך לפרק את הבעיה המקורית לבעיות קטנות יותר ולתקוף כל אחת מהן בנפרד. שיטה זו רלוונטית במיוחד כאשר אנו מזהים בעיה עם פרטים רבים שכל אחד מהם בפני עצמו פשוט יחסית, והקושי נובע בעיקר מהשילוב ביניהם.

אנו מבינים, אם כן, שברצוננו להמיר את חישוב השטח המורכב בחישוב של כמה שטחים פשוטים, אך נראה שאין דרך קלה לפרק את הצורה הנתונה לצורות נוחות כמו מלבנים ומשולשים. כאן נוכל להשתמש בכלי נוסף – התבוננות במשלים.

התבוננות במשלים

בעיות יכולות לתעתע בנו בכך שהן מסיטות את תשומת הלב שלנו לפרטים שלא מקדמים אותנו לעבר הפתרון. לפעמים, במקום להסתכל על העצמים שלגביהם נשאלת השאלה, נוח יותר להתבונן ברווחים ביניהם או בחורים שהם משאירים ברקע שמסביבם. במקרים רבים ניתוח של המשלים עשוי להיות פשוט יותר מניתוח ישיר של העצמים בבעיה, ולאחריו ניתן יהיה להסיק לגבי העצמים המקוריים.

כך, במקרה שלנו, הרקע שמסביב לצורה ניתן לחלוקה לצורות נוחות בהרבה מהצורה עצמה, ומתוך חישוב השטח שלו ניתן לקבל בקלות את שטח הצורה המבוקש.

רמזים ודגשים

רמז 1: זו אינה צורה שאנחנו יודעים לחשב את השטח שלה באופן ישיר. אילו צורות אנחנו כן יודעים לחשב את שטחן? האם נוכל להשתמש בדרך כלשהי בידע הזה עבור השאלה הזו?

רמז 2: נראה שקשה למצוא בתוך הצורה שטחים שאנחנו יודעים לחשב. מה עם למצוא אותם מחוץ לצורה?

רמז 3: בתור רמז נוסף ניתן להציג במפורש את אחד המשולשים החיצוניים (את האדום, למשל).

שאלה 2: מתיחה לילית

בפנימייה יש 10 חדרים. לכל חדר יש דלת, ובכל חדר מתגורר דייר אחד. הדיירים בפנימייה אוהבים לפרק זה לזה את דלתות החדר כמתיחה. כל אחד מדיירי הפנימייה משתתף במתיחה פעם אחת בלבד בלילה. הדיירים מתעוררים לפי סדר חדריהם, וכל אחד מהם בודק את דלת חדרו: אם היא נמצאת במקום, הוא מפרק דלת בחדר אחר כלשהו, ומעביר אותה למחסן; אם הוא רואה שאין לו דלת בחדרו, הוא לוקח דלת מהמחסן ומתקין אותה אצלו. מהו המספר הגדול ביותר של דלתות שיכולות להישאר במחסן בסוף הלילה?

פתרון

ניתן להגיע ל-8 דלתות במחסן בסוף הלילה.

ראשית, נראה שבאמת ניתן להשאיר 8 דלתות במחסן. יש דוגמאות רבות לתהליך שכזה. נציג כאן אחת מהן: הדייר הראשון יפרק בתורו את הדלת של הדייר האחרון. לאחר מכן, כל דייר בין השני לתשיעי יפרק את הדלת של החדר הקודם: דייר 2 יפרק את הדלת של חדר 1, דייר 3 יפרק את הדלת של 2, וכן הלאה. כך אנחנו מוודאים שכל דייר למעט הדייר העשירי יתעורר כשדלתו עדיין במקומה. לבסוף, הדייר העשירי יתעורר וייקח בחזרה דלת מהמחסן.

כעת, נוכיח שאי אפשר להישאר עם יותר מ-8 דלתות. נשים לב שכל אדם שמתעורר יכול להגדיל את כמות הדלתות במחסן ב-1 (אם יש לחדר שלו דלת), או להקטין אותה ב-1 (אם דלתו מפורקת). אילו כולם היו מעבירים דלת למחסן (כלומר מגדילים ב-1 את כמות הדלתות שבו), היינו נשארים עם 10 דלתות במחסן. אם לעומת זאת נאפשר אפילו לדייר יחיד לקחת דלת מהמחסן, הרי מספר הדלתות שיישארו בו בסוף הלילה יקטן לפחות ב-2. זאת מפני שאותו דייר גם לא הוסיף דלת למחסן, וגם גרע ממנו דלת. כלומר, כדי להישאר עם יותר מ-8 דלתות במחסן, דרוש שכל אחד ואחד מהדיירים יפרק דלת ושאף אחד מהם לא ייקח דלת בחזרה.

האם ניתן ליצור מצב כזה? קל לראות שלא – הרי הדייר הראשון מתעורר ומפרק דלת של דייר אחר כלשהו. אם כך, כשיתעורר הדייר האחר, לא תהיה לו דלת והוא בהכרח ייקח דלת בחזרה מהמחסן. מכאן ש-8 דלתות הוא אכן המספר המירבי שניתן להשאיר במחסן בסוף הלילה.

הסבר לפתרון

דבר ראשון וחשוב: שאלות שבהן כתוב "מצאו את המספר הגדול/הקטן ביותר..." הן למעשה שתי שאלות במסווה של אחת. כדי למצוא את המספר הגדול ביותר צריך לעשות שני דברים:

א. להראות שבאמת אפשר להשיג את המספר הזה (חסימה מלמטה);
ב. להראות שאי אפשר להשיג משהו טוב יותר (חסימה מלמעלה).

חשוב להבהיר שכל אחד מאלו בנפרד אינו מהווה פתרון מלא של השאלה, ויש לקיימם יחד.

הקושי בשאלה זו נובע מכך שיש מספר רב מאוד של אפשרויות לסדר פירוק וחיבור של דלתות, וקל מאוד ללכת לאיבוד בין כל ההסתעפויות שבדרך. ההתגברות על הקושי מתאפשרת בזכות הבחנה עיקרית אחת שצוינה בפתרון – כל דייר מגדיל או מקטין את מספר הדלתות במחסן ב-1 בדיוק. כך, ניתן לעקוב אחרי מספר הדלתות הכולל במחסן מבלי לעקוב אחרי כל דלת בנפרד.

מעקב אחרי ספירה כוללת

ישנן בעיות שדורשות מעקב אחרי תהליכים מורכבים עם מספר רב של אפשרויות והסתעפויות. בבעיות כאלו, כדאי מאוד למצוא גודל כולל מסוים שקל לעקוב אחריו, ולהבין איך כל אחד מהצעדים האפשריים בדרך עשוי להשפיע על הספירה הכוללת, גם מבלי לעקוב אחרי הפרטים הספציפיים שהוא מאגד בתוכו. הסתכלות זו מאפשרת לראות את התמונה הגדולה ולא לאבד את היער בין כל העצים.

מכאן, ההבנה היא שמספר הדלתות המירבי במחסן יתקבל אם מספר מירבי של דיירים יתעוררו כשדלתם עדיין מחוברת. בשלב זה, כשאנחנו יודעים למה אנחנו מכוונים, כדאי להתחיל "לשחק" עם הבעיה – האם אנחנו מצליחים ליצור מצב שבו כל הדיירים מתעוררים עם דלת מחוברת? אם לא, האם אנחנו מצליחים ליצור מצב שרק דייר אחד מתעורר ללא דלת?

כעת, לאחר שלא הצלחנו להגיע ל-10 דלתות במחסן, ניתן לנסח טיעון שמסביר מדוע זה לא אפשרי, כפי שמופיע בפתרון. האינטואיציה לכך מגיעה מניסיונות לשחק עם הבעיה בידיים.

דרך טובה לבדוק את הפתרון היא **בדיקה של מקרים פשוטים יותר**. מה קורה אם יש רק שני דיירים? שלושה? ארבעה? אלו מקרים שקל לבדוק ידנית, והם מאפשרים לקבל אינטואיציה עבור המקרה המלא שבבעיה.

רמזים ודגשים

כדאי להמליץ לתלמידים לנסות לשחק קצת עם הבעיה; לנסות לעקוב אחרי תהליך כלשהו, עוד לפני שמנסים לחשוב על טיעונים מכלילים או חסמים ברורים.

רמז 1: כשדייר מתעורר, מה קורה למספר הדלתות במחסן?

רמז 2: מה קורה כשדייר מתעורר עם דלת מחוברת? מה קורה כשהוא מתעורר עם דלת חסרה? מה היינו רוצים שיקרה על מנת שנקבל מספר מירבי של דלתות במחסן בסוף הלילה?

חשוב לוודא שהתלמידים מבינים את הצורך הן בדוגמה והן בחסם, עניין שעשוי להיות מבלבל בהתחלה. אם תלמיד מציג רק דוגמה, אפשר לשאול אותו, "אתה בטוח שאי אפשר להשיג יותר דלתות? האם יש לך הוכחה לכך?" אם תלמידה מציגה רק חסם, אפשר לשאול, "את בטוחה שאפשר להשיג את מספר הדלתות שאת טוענת? איך את יכולה להיות בטוחה?"

שאלה 3: סדרות

נתונה סדרה של שישה מספרים שלמים. כל מספר, החל מהמספר השלישי, שווה לסכום שני קודמיו. כמו כן, ידוע כי בסדרה יש שלושה איברים חיוביים ושלושה איברים שליליים, וכי האיבר השלישי בסדרה הוא 4. מהו האיבר הראשון בסדרה?

ידע מקדים

יש לוודא שהתלמידים מרגישים בנוח עם סימון של גדלים כמשתנים/נעלמים ועם כתיבה של משוואות פשוטות באמצעותם.

פתרון

האיבר הראשון בסדרה הוא 11.

כיוון שכל איבר בסדרה הוא סכום שני קודמיו, הרי אם שני האיברים הקודמים הם בעלי אותו סימן – כך גם האיבר הנוכחי. כלומר, אם בנקודה כלשהי יש שני איברים עוקבים עם אותו סימן, כל האיברים מכאן ואילך יהיו בעלי אותו סימן. כיוון שיש מספר זהה של איברים חיוביים ושליליים, הם חייבים להופיע לסירוגין, ומהנתון על האיבר השלישי (שהוא חיובי), נקבל שכל האיברים שבמקומות האי-זוגיים חיוביים, ושאלה שבמקומות הזוגיים – שליליים. ←

כעת, נסמן את האיבר הראשון בסדרה (שאותו נתבקשנו למצוא) בתור a, ונתחיל לנתח את איברי הסדרה בזה אחר זה.

כיוון שסכום שני האיברים הראשונים הוא 4, האיבר השני יהיה $4-a$, וכדי שיהיה שלילי כנדרש, נקבל ש- $a>4$.

האיבר הרביעי יהיה $4-a+4=8-a$. כדי שאיבר זה יהיה שלילי כנדרש, נקבל ש-$a>8$.

האיבר החמישי יהיה $4+8-a=12-a$, והוא חיובי – כלומר $a<12$.

לבסוף, האיבר האחרון יהיה $8-a+12-a=20-2a$, והוא שלילי: כלומר $2a>20$, או $a>10$.

משילוב של כל התנאים שמצאנו, הגענו לכך ש-a בין 10 ל-12. מכיוון שנתון שכל איברי הסדרה שלמים, האפשרות היחידה היא $a=11$, וזהו האיבר הראשון בסדרה.

הסבר לפתרון

כמו בבעיות מאתגרות רבות, בשאלה זו ניתן לקבל לא מעט אינטואיציה פשוט מ"לשחק" עם מרכיבי הבעיה. אם ננסה לבחור באקראי את ערכו של האיבר הראשון, נגלה שתנאי היצירה של איברים חדשים כסכום של שני האיברים הקודמים מגביל מאוד את ערכי האיברים הבאים, ולמעשה קביעה של האיבר הראשון מגדירה בצורה חד-ערכית את כל שאר איברי הסדרה. תשומת לב לכך מכוונת אותנו לרעיון של סימון האיבר הראשון כנעלם (A) ומציאת ביטויים עבור שאר איברי הסדרה תוך שימוש בנעלם זה.

האתגר הבא הוא מציאת ערך לאיבר הראשון שיקיים את תנאי החיוביות והשליליות של האיברים בסדרה. אם לא נדע אילו איברים נרצה שיהיו חיוביים ואילו שליליים, קשה יהיה לנחש את האיבר הראשון, כיוון שההשפעה שלו על האיברים השונים היא לא טריוויאלית. כאן נכנס הרעיון שכדי להבין את תנאי החיוביות והשליליות עלינו להתעלם מפרטים לא חשובים ולהתמקד בתכונה הרלוונטית.

בידוד תכונות רלוונטיות

בעיות עשויות לכלול פריטים עם כמה תכונות שונות, שקשה לחשוב על כולן במקביל. כלי משמעותי בפתרון בעיות מורכבות הוא זיהוי של תכונה ספציפית שמעניינת אותנו לצורך השאלה או הסעיף שאיתו אנו מתמודדים, והתעלמות מתכונות שאינן רלוונטיות באותו הרגע. הסתכלות כזו מאפשרת למקד את החשיבה ולהסיק תוצאות כלליות על פרטי הבעיה, שיקדמו אותנו בהמשך הפתרון.

במקרה שלנו, התכונה המעניינת של האיברים היא הסימן שלהם – חיובי או שלילי. מתוך ההבנה שסכום של שני מספרים חיוביים הוא חיובי ושל שני שליליים הוא שלילי, ללא תלות בערכם המדויק, ניתן להסיק מסקנות כלליות על אופייה של הסדרה. ברגע שהבנו בדיוק אילו איברים צריכים להיות חיוביים ואילו שליליים, המשך הפתרון הופך לפשוט הרבה יותר.

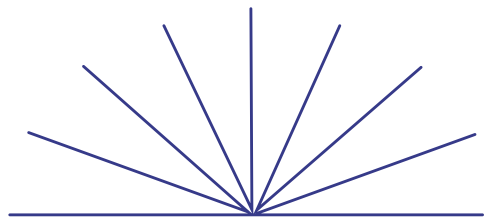
רמזים ודגשים

רמז 1: נתון לנו שבסדרה יש שלושה איברים חיוביים ושלושה שליליים. האם אלו יכולים להופיע בכל סדר?

רמז 2: אנחנו מחפשים בבעיה מספר שאינו ידוע. איך היינו ניגשים בדרך כלל לבעיה כזו?

רמז 3: אם הבנו אילו איברים חיוביים ואילו שליליים, האם זה מגביל את האיבר הראשון? נסו להציב בו כל מיני מספרים – איפה זה משתבש?

שאלה 4: ספירת זוויות ופישוט בעיות



כמה זוויות קטנות מ-°180 מופיעות באיור?

ידע מקדים

יש לוודא שהתלמידים יודעים מה הכוונה בזווית הקטנה מ-°180.

פתרון

באיור יש 35 זוויות הקטנות מ-180 מעלות.

הזוויות באיור מופיעות רק במקום אחד: בנקודת המפגש של כל הקרניים. בנקודה הזו, כל זוג קרניים שנפגשות יוצרות בדיוק זווית אחת הקטנה מ-°180 – למעט זוג אחד: שתי הקרניים הקיצוניות, שנמצאות על ישר אחד ואין ביניהן אף זווית שאינה שטוחה. מכאן שמספר הזוויות המבוקש הוא בדיוק אחד פחות ממספר זוגות הקרניים.

לכן, השאלה כעת היא: כמה זוגות ניתן לקחת מתוך תשעה פריטים? כדי לבחור זוג קרניים, נצטרך תחילה לבחור קרן אחת, ולאחר מכן לבחור אחת נוספת. בבחירה הראשונה יש 9 אפשרויות, אך בבחירה השנייה יש רק 8 אפשרויות, כיוון שאחת הקרניים כבר נלקחה. זה נותן בסך הכל 72 =9•8 אפשרויות. אבל עלינו לשים לב לבעיה: כל זוג נספר בשיטה זו פעמיים – פעם אחת בסדר אחד ופעם נוספת בסדר הפוך. כיוון שאין משמעות לסדר הקרניים בכל זוג, נחלק את התוצאה ב-2 ונקבל 72/2 =36 זוגות. נחסר זוג אחד עבור הזווית השטוחה ונקבל בסך הכול 35 זוויות הקטנות מ-°180.

הסבר לפתרון

ההבנה העיקרית שדורשת השאלה היא ההתאמה בין זווית לבין זוג קרניים. הדבר דורש להפשיט את מושג הזווית מפרטים מיותרים ולהסתכל עליו ברמה הבסיסית ביותר – זווית היא דבר שקיים כאשר שני קווים נחתכים זה בזה. מכאן, ההמרה של הבעיה לשאלת "כמה זוגות ניתן לבחור מתוך n פריטים" היא מתבקשת.
עבור שאלת בחירת הזוגות, אנחנו משתמשים ב**פירוק של הבעיה לבעיות קטנות יותר:** לא ברור מייד כמה דרכים יש כדי לבחור זוג פריטים מתוך אוסף, אך כן ברור כמה דרכים יש כדי לבחור פריט יחיד מתוכו. לכן נפרק את בחירת הזוג לשתי בחירות שונות שכל אחת מהן פשוטה בפני עצמה.

את הספירה הכפולה קל לפספס ללא בדיקה עצמית. דרך אחת לזהות אותה היא באמצעות בדיקת מקרה פשוט יותר.

בדיקת מקרים פשוטים
כשנתקלים בבעיה מורכבת, אחד הדברים שיכולים לעזור בפתרונה הוא התבוננות בבעיה דומה לה, אך פשוטה יותר. אפשר לנסות לחשוב על שאלה דומה אך עם מספרים קטנים יותר או עם השמטה של פרטים מסוימים. לא תמיד הרעיונות יעברו טוב בין הגרסאות של הבעיה, אבל פעמים רבות ההסתכלות הזו תאפשר לקבל אינטואיציה על הבעיה המקורית, או לבדוק כל מיני הנחות שקשה לבדוק ישירות במקרה המלא. כל עוד זוכרים שהבעיות לא בהכרח שקולות, הכלי הזה יכול להוות קרש קפיצה מחשבתי לפתרון הבעיה המלאה.

כך, במקרה שלנו, אפשר לשאול בכמה דרכים ניתן לבחור זוג פריטים מתוך אוסף של שלושה או ארבעה פריטים. אלו מספרים שקל לבדוק אותם ישירות ולראות שאכן יש בעיה אם נשכח להתייחס לספירה הכפולה. הרגל של בדיקה עצמית במקרים פשוטים מאפשר להימנע מהרבה טעויות או לתקן אותן.

רמזים ודגשים

רמז 1: ממה מורכבת כל זווית? מהם הרכיבים שנדרשים כדי ליצור זווית?

רמז 2: אם אנחנו רק מחפשים את מספר הזוגות מתוך אוסף, האם באמת אכפת לנו שאלו קרניים שמסודרות בצורה הזו ולא סתם עצמים בתוך שק?

רמז 3: איך נראה הפתרון עבור מספר קטן יותר של קרניים?

ייתכן מאוד שהתלמידים יצליחו בעבודה מסודרת לספור ידנית את כל הזוויות ולהגיע לתשובה נכונה. במקרה כזה כדאי לשאול "מה היה קורה אילו היו פה 100 קרניים?" כדי לעודד אותם לחשוב על פתרון כללי יותר.

שאלה 5: סופרים משולשים

במלבן שגודלו 20 על 22, שחולק למשבצות בגודל 1 על 1, הועבר אלכסון. כמה משולשים יש בציור שהתקבל?

ידע מקדים

כדאי לוודא שהתלמידים שולטים בנושא של יחס ופרופורציה בין מספרים.

פתרון

באיור יש 480 משולשים.

כל משולש מורכב משלושה ישרים בכיוונים שונים. כיוון שכל הישרים באיור, למעט האלכסון, הם או אנכיים או אופקיים, המשולש חייב לכלול את האלכסון כאחת הצלעות. כעת, צריך לבחור את הצלעות האחרות – אחת אופקית ואחת אנכית. יש 21 אפשרויות לצלע אופקית, ו-23 לצלע אנכית. האם כל זוג של צלע אופקית וצלע אנכית, יחד עם האלכסון, ייתן לנו משולש? לא – יכול להיות ששלושת הישרים נפגשים בנקודה אחת. זה עשוי לקרות רק כשהאלכסון עובר בקודקודים של המשבצות בציור.

נמצא את הקודקודים הללו: יש כמובן את שני הקודקודים של המלבן עצמו, שנסמן ב-A ו-B. כדי למצוא קודקודים נוספים, נתבונן במשולש ישר הזווית שנוצר על ידי A,B וקודקוד נוסף של המלבן. יחס הניצבים של המשולש הזה הוא 20:22. אם נמצא נקודה נוספת C על האלכסון – שנמצאת על קודקודי המשבצות – הרי נוכל ליצור משולש קטן יותר מ- A, C וקודקוד נוסף שיהיה דומה למשולש הגדול, אך קטן ממנו ביחס כלשהו. לכן גם היחס בין ניצבי המשולש הקטן הוא 20:22.

אילו מספרים שלמים מקיימים את היחס הזה? הצורה המצומצמת ביותר של היחס היא 10:11, כך שמספרים שלמים ביחס זה הם בהכרח הרחבות של היחס – 10:11, 20:22, 30:33 וכו'. מבין אלו, רק הצורה 10:11 קטנה מספיק כדי להיכלל בתוך המלבן, ולכן מלבד קודקודי המלבן, נקודה זו (שהיא מרכז המלבן) היא היחידה שבה עובר האלכסון. ←

מכאן נוכל למצוא את מספר המשולשים – כל משולש מורכב מאחד מבין 21 קווים אופקיים ואחד מבין 23 קווים אנכיים, ובסך הכול 483 = 21•23 זוגות כאלו. מתוך אלו, שלושה זוגות מתאימים לנקודות שמצאנו ולכן אינם יוצרים משולשים, כך שמספר המשולשים באיור הוא 480 = 483-3

הסבר לפתרון

התובנה החשובה הראשונה היא שלכל המשולשים באיור יש מבנה דומה – קו אנכי וקו אופקי, יחד עם האלכסון. ההבנה הזו מגיעה מהסתכלות על משולש כשלשה של ישרים – הסתכלות שימושית בדרך כלל בבעיות מסוג זה. ניתן כמובן לקבל כיוון לרעיון פשוט מהתבוננות בכמה משולשים באיור, ומתשומת לב לכך שלכולם יש הרכב דומה. זה מאפשר לנו **לבודד תכונות רלוונטיות** ולספור רק כמה זוגות של ישרים אנכיים ואופקיים יש באיור.

בעקבות ההבנה הזו, מפתה מאוד לומר שהתשובה היא 483, וללא ציור של השאלה באמת קשה לשים לב לבעיה שבכך. תלמידה שיש לה דף משבצות וסרגל תוכל כנראה לשרטט את הציור המלא, אך ללא כלים אלו, ניסיון ציור של דוגמה קטנה יותר (למשל, 3X4) עשוי שלא לחשוף את הבעיה. כאן אנו באמת רואים את הבעיה שב**בדיקת מקרים פשוטים יותר** – הם לא תמיד מייצגים נאמנה את הבעיה המקורית. אין לכך פתרון קסם – זה עניין של ניסיון ותשומת לב לפרטים.

לאחר שהבנו שעלינו לחפש נקודות שבהן האלכסון חותך את קודקודי המשבצות, ניתן באמת להתבונן בדוגמאות קטנות יותר ולנסות לראות מתי יש נקודות כאלו (וכמה) ומתי אין. בדיקה של כמה מלבנים קטנים יחסית יכולה לרמוז לכיוון של יחסים קבועים בין אורכי הניצבים, ומשם להוביל לפתרון.

רמזים ודגשים

רמז 1: האם ניתן למצוא מאפיינים משותפים לכל המשולשים באיור?

רמז 2: האם כל זוג של ישר אנכי וישר אופקי מתאים בהכרח למשולש? אם לא, אילו לא מתאימים?

רמז 3: מה קורה במלבן 2X4? במלבן 2X6? ובמלבן 3X6?

באופן כללי, מומלץ לעודד את התלמידים לעבוד עם סרגל על דף משבצות.

שאלה 6: גורמים משותפים והעברת אגפים

נתונים מספרים טבעיים $a<b<c<d$ המקיימים $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{b}{d}-\frac{a}{c}$ וגם $170<a\cdot b\cdot c\cdot d<220$. מצאו את $a+b+c+d$.

ידע מקדים

על התלמידים להרגיש בנוח עם מניפולציות אלגבריות כמו פתיחת סוגריים, הוצאת גורם משותף, ועבודה עם שברים.

פתרון

סכום המספרים הוא 24.

ניקח את הקשר הנתון ונעביר בו אגפים לקבלת:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b}{d}+\frac{c}{d} \quad (1)$$

נוציא גורף משותף בכל אגף:

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{d}(b+c) \quad (2)$$

נכפיל את שני הצדדים ב-bc:

$$a(c+b)=\frac{bc}{d}(b+c) \quad (3)$$

כיוון שכל המספרים חיוביים, הרי $b+c$ שונה מ-0, ולכן נוכל לחלק בו:

$$a=\frac{bc}{d} \quad (4)$$

נכפיל ב-d ונקבל:

$$ad=bc \quad (5)$$

המשמעות של תוצאה זו היא שהמכפלה $a•b•c•d$, שהיא מכפלה בין הביטויים השווים שקיבלנו במשוואה (5), היא למעשה מספר ריבועי. בין 170 ל-220 יש רק מספר ריבועי אחד – $196=14^2$ (זאת כיוון ש-$13^2=169<170$, ו-$15^2=225>220$). לכן $ad=bc=14$.

המספר 14 מתפרק למכפלת שני גורמים בשתי דרכים בסך הכול: $7•2=14•1=14$. כיוון שארבעת המספרים שלנו שונים זה מזה, הרי הם אכן 1,2,7,14, וסכומם הוא $a+b+c+d=1+2+7+14=24$.

הסבר לפתרון

המניפולציות האלגבריות בתחילת הפתרון עשויות להיראות קצת כמו קסם. המחשבה פה היא שהנתון שלנו מדבר על מכפלות, ולכן אנחנו רוצים להפוך כמה שיותר סכומים למכפלות, על ידי הוצאת גורמים משותפים היכן שניתן. זו המוטיבציה מאחורי העברת האגפים במשוואה (1), שמקבצת איברים דומים באותו צד. במעבר ממשוואה (2) למשוואה (3) אנו מזהים שני גורמים שנראים דומים, ומוצאים את הפעולה שתגרום להם להפוך לזהים לגמרי ותאפשר לנו לצמצם אותם מהמשוואה. כאמור, לאורך כל הדרך אנחנו מונחים על ידי הנתון שלנו, שמובא בצורת מכפלה ולא כסכום. כמובן ניתן להגיע לתוצאה זו גם בדרכים אחרות.

לאחר שׂשיחקנו מספיק עם הביטוי וקיבלנו תוצאה מפושטת כפי שמופיעה במשוואה (5), תובנה לא טריוויאלית היא שזה מגביל לנו מאוד את מכפלת ארבעת האיברים. ברגע שהבנו שהמכפלה הזו חייבת להיות מספר ריבועי, ניתן להבין בעזרת קצת ניסוי וטעייה שיש רק מספר ריבועי אחד בתחום. כאן כמובן נכנסת הרלוונטיות של היותם של המספרים שלמים – אחרת, כנראה, נתון בצורת אי-שוויון לא יספיק לנו להגבלת התוצאה הסופית. לבסוף, אנחנו משתמשים בנתון שכל המספרים שונים זה מזה כדי לקבל את כל ארבעת המספרים.

השאלה הזו משתמשת בהרבה נתונים, וחשוב מאוד לתת את הדעת על כל אחד מהם. התבוננות בנתונים יכולה להוות רמז שמכוון אותנו לעבר פתרון השאלה, ופספוס של נתון עשוי למנוע מאיתנו להתקדם.

רמזים ודגשים

רמז 1: נתון המשך שלנו מנוסח במונחי מכפלות. איך נוכל להתחיל להפוך את המשוואה למשוואה של מכפלות במקום של סכומים?

רמז 2: האם יש לנו בנתון איברים עם גורם משותף שאפשר להוציא החוצה? האם אפשר להיפטר מהשברים?

רמז 3: לאחר שקיבלנו את התנאי במשוואה (5), מה נוכל לעשות איתו? לאיזה נתון הוא יכול להיות רלוונטי?

רמז 4: האם יש נתונים שעוד לא התייחסנו אליהם? מה אפשר להסיק מהם?

השאלה כוללת מעברים אלגבריים רבים. כשתלמיד מבצע מעבר שגוי, כדאי לתת לו לבדוק את המעבר על ידי הצבת מספרים כדי לקבל אינטואיציה טובה יותר שתסביר מדוע המעבר לא עובד.

אם תלמידה נתקעת בהמשך, כדאי לעזור לה ולהצביע על נתונים שעוד לא נעשה בהם שימוש, ולשאול איך הם עשויים להיות רלוונטיים.

שאלה 7: מספרים ראשוניים

מצאו את המספר הראשוני הקטן ביותר אשר כתיבת ספרותיו בסדר הפוך תיתן ריבוע של מספר שלם.

ידע מקדים

יש לוודא שהתלמידים מכירים מספרים ראשוניים, ובפרט יודעים ש-1 אינו מספר ראשוני.

פתרון

הראשוני הקטן ביותר המקיים את התנאי הוא 61.

נתבונן במספרים הריבועיים הראשונים, אלו עם פחות מ-3 ספרות:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

אם נהפוך את הספרות של אלו, נקבל:

1, 4, 9, 61, 52, 63, 94, 46, 18

מתוך אלו, רק 61 הוא מספר ראשוני. לא קיימים ראשוניים קטנים יותר המקיימים את התכונה, כיוון שכל מספר ריבועי שלא בדקנו הוא בעל שלוש ספרות ומעלה, ולכן ייתן מספר גדול מ-61 כשנהפוך את ספרותיו.

נשים לב שאין צורך להתייחס למספרים המסתיימים ב-0 (ולכן משנים את מספר הספרות שלהם כאשר הופכים אותם), כיוון שמספרים כאלו בהכרח מתחלקים ב-10 ואינם ראשוניים.

הסבר לפתרון

ראשית, ברור שהמספר אינו יכול להיות חד ספרתי, כיוון שאז היפוך ספרותיו לא ישנה אותו, ומספר ריבועי אינו יכול להיות ראשוני. לכן אנחנו מעוניינים לכל הפחות במספרים דו-ספרתיים. הבעיה היא שאפילו אם נגביל את עצמינו לדו-ספרתיים בלבד, יש הרבה מאוד ראשוניים בתחום שבין 10 ל-99 (סה"כ 21). במקום להתחיל לעבור על כל הראשוניים הללו, נוכל לנסות לעבוד מהסוף להתחלה.

חשיבה מהסוף להתחלה

בבעיות רבות אנו מתבקשים למצוא עצם שיקיים תכונה כלשהי לאחר איזשהו תהליך. זה יכול להיות קשה – לא תמיד פשוט לנבא איך התהליך ישפיע על עצמים שונים ואיזו נקודת ההתחלה כדאי לבחור כדי שתוביל לתוצאה המבוקשת. לעומת זאת, אנחנו יודעים מהי נקודת הסיום שאליה אנחנו מכוונים – ולכן עשוי להועיל לנו להתחיל ממנה ולהפעיל את התהליך ההפוך כדי ללכת אחורה עד לנקודת ההתחלה שאותה אנחנו מחפשים. תהליכים שונים עשויים להיות מורכבים הרבה פחות בכיוון אחד מאשר בכיוון אחר, ולכן כדאי לנסות להתבונן גם בכיוון ההפוך ולבדוק אם הוא מוביל אותנו לפתרון.

כך, במקרה שלנו, במקום להתחיל עם מספר ראשוני, ננסה להתחיל עם מספר ריבועי – יש הרבה פחות כאלו (רק שישה דו-ספרתיים), ולכן לא יהיה קשה לעבור ולבדוק את כולם.

הסיבה שאנחנו עוברים מראש על המספרים לפי מספר הספרות שלהם היא שאף על פי שמספרים עשויים לגדול ולקטון כשהופכים אותם, כמות הספרות שלהם לא משתנה, ולכן מספרים רב-ספרתיים יישארו תמיד גדולים יותר ממספרים בעלי פחות ספרות.

רמזים ודגשים

רמז 1: האם נוכל לומר משהו על מספר הספרות של התוצאה?

רמז 2: אילו מספרים נרצה לקבל לאחר היפוך הספרות?

רמז 3: איך נוכל לוודא בקלות שהמספר שמצאנו הוא בהכרח הקטן ביותר שמקיים את התכונה?

בעת הצגת הפתרון כדאי להתעכב על האפשרות של מספר המסתיים באפסים, ולהסביר למה מספרים ראשוניים אינם יכולים להיות כאלה. מספרים ריבועיים יכולים אומנם להסתיים באפסים, אך כיוון שכיוון ההיפוך בשאלה הוא מראשוני לריבועי ולא להיפך, הרי זה לא משנה עבורנו.

שאלה 8: סודוקו מתמטי ומקרים קיצוניים

		2
	X	

בטבלה 3X3 מופיעות כל הספרות מ-1 עד 9. ידוע כי:

סכום הספרות בשורה העליונה הוא 10;

סכום הספרות בשורה האמצעית הוא 15;

סכום הספרות בטור הימני הוא 10;

סכום הספרות בטור השמאלי הוא 15;

סכום הספרות באלכסון שעולה מימין לשמאל הוא 16.

נתון מיקומה של הספרה 2. מצאו את המספר הממוקם בתא המסומן ב-X.

פתרון

הספרה בתא המסומן ב-X היא 6.

ראשית, אנו יכולים לקבל את סכום הספרות בשורה התחתונה ובטור האמצעי – זאת כיוון שסכום כל הספרות בטבלה הוא 1 + 2 + ... + 9 = 45. לכן הן סכום השורה התחתונה והן סכום הטור האמצעי הם 45 - 10 - 15 = 20.

16	15	20	10
10			**2**
15		X	
20			

כעת, נתבונן בשורה העליונה ובטור הימני. בשניהם נותרו לנו שתי ספרות שצריכות להשלים יחד עם 2 סכום של 10, כלומר, להיסכם בעצמן ל-8. 8 יכול להיבנות מסכום של שתי ספרות שונות בשלוש דרכים:

3+5 = 2+6 = 1+7 = 8

אך מבין אלו, רק 1+7 ו-3+5 רלוונטיות, כי 2 כבר תפוס.

נשאל את עצמינו: באיזו משבצת מבין ארבע אלו יכולה להופיע הספרה 1? הספרה 1 לא יכולה להופיע בטור או בשורה שמסתכמים ל-20, כיוון ששתי הספרות האחרות שנסכמות איתה הן לכל היותר 8 ו-9, אך 20›1+8+9. נוסף על כך, 1 לא יוכל להופיע בפינה השמאלית-עליונה, כיוון שאז הטור הימני יורכב מהספרות 2,3,5, ואף אחת מאלו לא תוכל להצטרף ל-1 ולספרה נוספת כדי להיסכם ל-16 באלכסון (לכל היותר נוכל לקבל שם 16›1+5+9). לכן נקבל ש-1 בהכרח נמצא בשורה האמצעית בטור הימני, ו-7 מתחתיו יצטרף כדי להיסכם ל-10: ←

16	15	20	10
10			**2**
15		×	**1**
20			**7**

כעת נותרו לנו שתי אפשרויות עבור השורה העליונה. אם 3 יהיה באמצע ו-5 יהיה משמאל, אזי בצירוף התנאי של האלכסון נקבל:

16	15	20	10
10	**5**	**3**	**2**
15		**4**	**1**
20			**7**

וזה בעייתי, כי הטור האמצעי לא יוכל להיסכם ל-20 (הוא יהיה לכל היותר 9+4+3<20). מכאן ש-5 יהיה בטור האמצעי ואילו 3 בשמאלי. נקבל:

16	15	20	10
10	**3**	**5**	**2**
15		**6**	**1**
20			**7**

כל שנותר לעשות הוא למלא את התאים שנותרו לפי הסכומים ולוודא שהכול מסתדר:

16	15	20	10
10	**3**	**5**	**2**
15	**8**	**6**	**1**
20	**4**	**9**	**7**

ואכן, כל הספרות מופיעות וכל הסכומים מתאימים לנתונים.
הספרה החסרה במקרה זה היא 6.

הסבר לפתרון

ההבנה הראשונה והחשובה ביותר בשאלה זו היא שסכום של חלק מהספרות בטבלה נותן לנו מידע גם על סכום הספרות הנותרות. תובנה זו מגיעה מ**התבוננות במשלים**, כלומר הבנה שעצם יכול להעיד על הרקע שמסביבו ולהיפך.

לאחר מכן השתמשנו בנתון המרכזי שיש לנו בתוך הטבלה (הספרה 2) כדי למצוא מידע על הספרות שמסביבה. כאן היו לנו ארבע ספרות שבמבט ראשון יכולות להיות מסודרות בהרבה דרכים שונות, ובדיקה של כולן עשויה לקחת זמן רב. כדי להתקדם בצורה יעילה, התמקדנו בספרה הקיצונית מבין הארבע.

התבוננות במקרה קיצוני
בבעיות רבות, הקושי יכול לנבוע מקיומם של מקרים רבים מאוד שלא ניתן לבדוק את כולם בזמן סביר. היינו רוצים להכניס לבעיה אילוצים נוספים שיאפשרו לנו לצמצם את מרחב הבדיקה שלנו לכזה שניתן להתמודד איתו. בבעיות כאלו, יכול להשתלם להתבונן לא על מקרה טיפוסי, אלא על מקרה שהוא קיצוני בדרך כלשהי ביחס לאחרים. מקרים כאלו לרוב ימתחו את תנאי הבעיה ויפיקו מכך אילוצים משמעותיים שיקטינו את כמות הבדיקות הנדרשות.

כך, במקרה שלנו, התבוננות על הספרה הקטנה ביותר (1) ובחינה שלה ביחס לסכומים הגדולים ביותר (20) הראו שאין הרבה דרכים למקם את הספרה מבלי לשבור את אילוצי השאלה. זה השאיר לנו בסך הכול שני מקרים לבדיקה, וניתן היה להבדיל ביניהם על ידי בדיקה ישירה שהראתה שרק אחד מהם מתאים לתנאי השאלה.

רמזים ודגשים

רמז 1: האם אפשר לומר משהו לגבי הסכומים בשורות/טורים החסרים? כמה גדולים/קטנים הם עשויים להיות?

רמז 2: אילו ספרות עשויות להיות בטור/שורה יחד עם 2?

רמז 3: איזו מהספרות הללו עשויה להיות המוגבלת ביותר מבחינת המקומות שהיא יכולה להיות בהם?

כשתלמידים מוצאים פתרון, כדאי לשאול אם הם יכולים להראות שזהו אכן הפתרון היחיד.

שאלה 9: לוגיקה

במהלך משחק כדורגל בין אבי, בני, גילי ודנה – מישהו בטעות בעט את הכדור גבוה מידי ושבר את החלון. אמא יצאה החוצה לשאול מי בעט את הכדור.

אבי אמר שבני שבר את החלון

בני אמר שגילי שברה את החלון

גילי מיד צעקה שבני משקר

דנה אמרה שהיא איננה אשמה

מאוחר יותר התברר שרק אחד או אחת מהילדים דיברו אמת. מי שבר או שברה את החלון?

פתרון

דנה שברה את החלון.

אם גילי משקרת, הרי שבני דובר אמת. אם היא אינה משקרת, הרי שהיא דוברת אמת. בשני המקרים דנה בהכרח משקרת, כלומר, דנה שברה את החלון.

ניתן באמת לראות שבמקרה זה גילי היא היחידה שמדברת אמת.

הסבר לפתרון

השאלה הזו מבלבלת מכיוון שיש לנו בה הרבה נתונים, אבל אנחנו לא יודעים על אילו מהם אפשר לסמוך. כדי להתקדם, נצטרך להבין מי מהילדים משקרים. זה מכוון אותנו להתמקד באמרה של גילי, שהיא היחידה שמתייחסת לאמיתות האמרות של הילדים. זה מיד נותן לנו יחס גומלין בין האמינות של גילי, לאמינות של בני, אליו היא מתייחסת.

ברגע שהבנו את זה, האמירה הבאה שצריכה לתפוס לנו את העין היא זו של דנה, מכיוון שהיא זו שהיפוכה נושא את המידע הממוקד ביותר.

רמזים ודגשים

רמז 1: מה נרצה להבין לפני שנוכל לזהות מי שבר את החלון?

רמז 2: אם אנחנו רוצים להבין מי דובר אמת, באיזה מהילדים נרצה להתמקד בהתחלה?

רמז 3: האם מצאנו ילדים שלא יתכן שהם דוברים אמת?

חשוב לוודא שתלמידים מצאו פתרון עם שלושה שקרנים ודובר אמת יחיד. אפשר לבקש כאתגר נוסף להוכיח שאין לשאלה פתרונות נוספים.

שאלה 10: הפיזיקה של תה בחלב

כדי להכין תה בסגנון אנגלי, יש לקחת כוס של מים רותחים, להניח בה תיון במשך דקה ולהוסיף חלב בטמפרטורת החדר. אליס, בוב וצ'ארלי מתווכחים לגבי הדרך הנכונה להכין את התה על מנת לקבל כוס תה חמה ככל האפשר.

- אליס אומרת שקודם יש להכניס את התיון, לחכות דקה, ורק אז להוסיף חלב.
- בוב אומר שקודם יש להוסיף חלב, ואז להכניס את התיון ולחכות דקה.
- צ'ארלי אומר ששניהם מבזבזים את הזמן בויכוחים מיותרים כיוון שבשני המקרים תתקבל כוס תה באותה הטמפרטורה.

מי מהשלושה צודק?

פתרון

בוב צודק.

בשני המקרים יש לנו כמות מסוימת של חום בכוס התה וכמות אחרת של חום בחלב, ושתי אלו מתמזגות יחד לכמות חום קבועה. בנוסף, בשני המקרים הכוס מאבדת חום לסביבה במהלך דקת ההמתנה. כמות החום שהולכת לאיבוד לסביבה אינה קבועה בשני המקרים – גופים חמים מאבדים חום מהר יותר מאשר גופים קרים.

המשמעות היא שבמקרה של אליס, אנו מחכים דקה כשהכוס חמה מאוד ולכן היא מאבדת הרבה חום במהלך הדקה הזו. במקרה של בוב, לעומת זאת, ההמתנה מתבצעת לאחר הערבוב, כשהכוס כבר קרה יותר, ולכן איבוד החום במהלך זמן זה הוא מתון יותר. כלומר, בסך הכל הכוס תשאר חמה יותר בסוף התהליך **בשיטה של בוב**.

הסבר לפתרון

בפתרון אנו משתמשים בעקרון של **מעקב אחרי ספירה כוללת**, שמאפשר לנו לדבר בצורה השוואתית על תהליכים מורכבים של ערבוב נוזלים. מתוך הבנה שהגודל המעניין הוא החום הכולל במערכת, אנו יכולים להתבונן במרכיבים השונים שלו ולזהות מה הוא החלק היחיד שעשוי ליצור הבדל בין השיטות.

לא פשוט פה לשים לב שהקירור הוא שונה בין השיטות השונות. שאלה אחת שניתן לשאול היא האם כל דקת קירור מקטינה את הטמפרטורה באותה מידה? אם כן, האם לא נוכל לחכות מספר רב של דקות ובכך לקרר את הכוס כרצוננו, אף לטמפרטורה נמוכה מזו של הסביבה? מכך נוכל להבין שקצב הקירור מוכרח להאט ככל שהטמפרטורה יורדת.

רמזים ודגשים

רמז 1: איפה נמצא החום במערכת בכל שלב של התהליכים?

רמז 2: מה החלק היחיד בתהליך שעשוי ליצור הבדל בכמות החום הסופית במערכת?

רמז 3: האם שתי דקות ההמתנה בין שתי השיטות יוצרות את אותו האפקט? מה ההבדלים ביניהן?

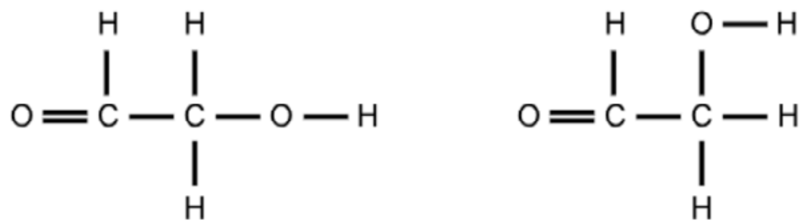
שאלה זו דורשת הסקת מסקנות על מערכת לא מוכרת, מתוך הנסיון היומיומי שלנו. שאלות רבות בפיזיקה בנויות כך, וגם אם לא למדנו את החומר הדרוש בצורה פורמלית – נוכל להסתדר בזכות האינטואיציה שפיתחנו מהתבוננות כללית על העולם שסביבנו.

שאלה 11: הכימיה של קשרים במולקולות

מולקולה היא מבנה המורכב מכמה אטומים המחוברים ביניהם בקשרים היוצרים מבנה אחד. בין כל שני אטומים קשורים יכולים להיות קשר אחד, שניים או שלושה. ידוע כי:

- אטומי מימן (H) יוצרים קשר אחד בדיוק
- אטומי פחמן (C) יוצרים ארבעה קשרים בדיוק
- אטומי חמצן (O) יוצרים שני קשרים בדיוק

שתי מולקולות נקראות זהות אם ניתן להפוך אחת לאחרת ע"י הזזה של הקשרים במרחב ללא ניתוק שלהם (למשל - שני המבנים המתוארים באיור מייצגים את אותה המולקולה).



א. כמה מולקולות שונות ניתן להרכיב מ-3 אטומי פחמן, 8 אטומי מימן ואטום חמצן אחד (C_3H_8O)?

ב. כמה מולקולות ניתן להרכיב מ-3 אטומי פחמן, 7 אטומי מימן ואטום חמצן אחד (C_3H_7O)? נמקו.

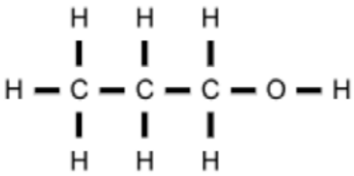
פתרון

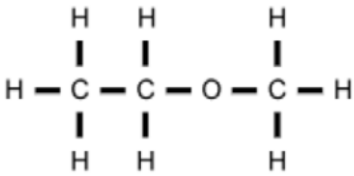
א: 3. ב: 0.

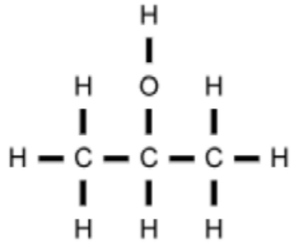
עבור C_3H_8O, נספור את כמות הקשרים הכוללת במולקולה. אנחנו יודעים כמה קשרים יוצר כל אטום, ואם נסכום את כולם נקבל לכאורה $22 = 1\cdot2 + 8\cdot1 + 3\cdot4$ קשרים. אבל, כל קשר כזה מחבר שני אטומים ולכן מופיע פעמיים בספירה שלנו. מכאן שנוכל לחלק ב-2 ולקבל שיש לנו במולקולה בסך הכל $\frac{22}{2}=11$ קשרים.

אטומי המימן יוצרים קשר יחיד, ולכן אף פעם לא יכולים להיות מחוברים זה לזה ישירות, שכן לשני אטומי מימן קשורים לא יישארו קשרים פנויים כדי להתחבר לשאר המולקולה. מכאן שלכל מימן קשר משלו ובסך הכל 8 קשרים מתוך ה-11 מקשרים מימנים לשאר המולקולה. זה משאיר שלושה קשרים שיכולים לחבר בין החמצן והפחמנים. כיוון שיש ארבעה מהם, הרי ש-3 קשרים הוא המספר המינימלי שנדרש על מנת לחבר את כולם זה לזה, ולכן אין לנו קשרים "מיותרים" כדי ליצור קשרים כפולים.

כל שנותר לנו לעשות הוא לזהות את כל הדרכים השונות לחבר שלושה פחמנים וחמצן בעזרת שלושה קשרים. יש **בסך הכול 3 דרכים** כאלה, ואלו המולקולות שנוצרות מהן: ←







עבור סעיף ב׳, נוכל להתחיל את הניתוח בצורה דומה. ספירה של כמות הקשרים הכוללת נותנת לנו $3 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 21$ קשרים, וזו בעיה – כיוון שכל קשר מחבר בין שני אטומים, הרי שלאחר חלוקה של 21 ב-2 נקבל מספר לא שלם של קשרים. מכאן שמהרכב האטומים הנתון בסעיף זה **לא ניתן להרכיב אף לא מולקולה אחת.**

הסבר לפתרון

במבט ראשון, השאלה הזו נראית מאוד מפחידה – נראה שיש כמות גדולה מאוד של אפשרויות ולא ברור איך אפשר לעבור עליהן בצורה מאורגנת. כדי להתמודד עם כך, אנו יכולים להשתמש בעקרון של **מעקב אחרי ספירה כוללת**, ולהסיק מסקנה כללית לגבי כמות הקשרים במולקולה עוד לפני שנתהה על המבנה הספציפי שלה.

כדי להבין את אופי הקשרים במולקולה אף יותר, **אנחנו מתבוננים במקרה הקיצוני** של אטום המימן, שהוא המאולץ ביותר מבחינת הדרך שבה הוא מקושר לשאר המולקולה, וביחד עם המסקנה לגבי כמות הקשרים הכוללת, ניתן להבין שיש רק כמות קטנה מאוד של קשרים שבאמת יש לנו חופש לשחק איתם. זה מצמצם את מרחב האפשרויות מספיק כך שנוכל לבדוק את כולו בצורה ידנית ולאתר את כל המולקולות האפשריות.

בסעיף ב׳ אנו משתמשים שוב בעקרון הספירה הכוללת כדי לזהות בעיה בכמות הקשרים ולהבין שמולקולה בהרכב הנתון לא תיתכן.

רמזים ודגשים

רמז 1: כמה קשרים בסך הכל עשויים להיות במולקולה?

רמז 2: אילו מהאטומים הם המוגבלים ביותר מבחינת דרכי החיבור שלהם לשאר המולקולה?

רמז 3: בחלק ב׳, האם אנחנו מצליחים ליצור איזושהי מולקולה כנ״ל? אם לא, איפה זה משתבש כשאנחנו מנסים לבנות אותה?

שאלה זו יכולה להיראות מפחידה בהתחלה בגלל ריבוי המושגים החדשים. חשוב להבין שלמרות שהיא נראית כמו שאלה בכימיה, השאלה אינה דורשת ידע מקדים והנושא הנידון בה הוא מתמטי לחלוטין.

שאלה 12: מהלך מנצח במדעי המחשב

עדן משחקת את המשחק הבא: לפניה לוח משחק כבאיור.

בשלב הראשון היא מניחה את כלי המשחק שלה על משבצת לבחירתה בטור השמאלי של הלוח. לאחר מכן בכל צעד היא מזיזה את כלי המשחק שלה צעד אחד באחד משלושה כיוונים מותרים - ימינה, למטה, או באלכסון ימינה-למטה. כאשר הכלי נמצא בקצה הימני של הלוח, ניתן להזיז אותו ימינה אל נקודת הסיום. בסוף המשחק עדן זוכה בסכום הנקודות שנמצא על כל המשבצות בהן ביקרה.

מהו הניקוד הרב ביותר אליו ניתן להגיע? נמקו היטב כיצד הגעתם לפתרון ומדוע זהו אכן הניקוד המקסימלי האפשרי.

<table>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>1</td><td>-2</td><td>4</td><td rowspan="6">END</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-4</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-3</td><td>0</td><td>-4</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-3</td><td>-1</td><td>0</td><td>-3</td></tr>
</table>

פתרון

הניקוד המירבי הוא 4.

נצייר טבלה חדשה, אשר תיבנה כך: נעבור על כל המשבצות, החל מהטור השמאלי ועד לימני, ובכל משבצת נכתוב את סכום הנקודות הגבוה ביותר איתו ניתן להגיע למשבצת זו. המשמעות של זה היא לבחור עבור כל משבצת את המשבצת הקודמת שאליה ניתן להגיע עם הסכום הגבוה ביותר. למשל, המשבצת השמאלית-עליונה תישאר "1" כי לא ניתן להגיע אליה בשום דרך מלבד להתחיל בה, אך זו שמתחתיה תהיה "0", כי ניתן להגיע אליה ממשבצת "1" ובסך הכל לקבל שם 0. בעת בניית הטבלה החדשה, נדאג שלא למלא משבצת לפני שמילאנו את כל המשבצות שמובילות אליה (לכל היותר 3 – אחת מעל, אחת משמאל ואחת באלכסון), על מנת לוודא שאנחנו אכן בוחרים בכל פעם את המשבצת בעלת הערך הגבוה ביותר. הטבלה שנקבל מתהליך זה תיראה כך:

<table>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>3</td><td rowspan="6">END</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr>
</table>

כאן אנו רואים בקלות שהניקוד הגבוה ביותר איתו ניתן להגיע לטור הימני הוא 4.

הסבר לפתרון

הקושי בשאלה הזו מגיע מכך שיש מספר גדול מאוד של דרכים שאפשר לעבור בהן, ואין אפשרות לבדוק את כולן בזמן סביר. לכן נידרש לארגן מחדש את הנתונים שלנו בצורה שתאפשר לנו לבחון אותם במהירות ובפשטות.

ההבנה החשובה בשאלה היא שהדרך הטובה ביותר להגיע לכל משבצת על הלוח אינה תלויה בהמשך הדרך שתגיע אחריה. זה מאפשר לנו **להתמקד בתכונה הרלוונטית** היחידה של כל משבצת – שהיא הניקוד המירבי איתו ניתן להגיע לאותה המשבצת.

מכאן, נגיע למסקנה כי הניקוד המירבי בכל אחת מהמשבצות בדרך תלוי ישירות בניקוד המירבי בכל אחת מהמשבצות שמופיעות לפניה. זה מאפשר לנו לעשות מעבר אחד על כל המשבצות, ולעדכן אותן בזו אחר זו עם הניקוד המירבי האפשרי, ובלבד שנעשה את המעבר בסדר מתאים וללא דילוגים.

רמזים ודגשים

רמז 1: נניח שהיינו מחוייבים לעבור דרך משבצת מסויימת באמצע. האם הדרך אל המשבצת תשפיע על הדרך שתגיע אחרי המשבצת?

רמז 2: האם יש בטור השמאלי משבצות שבוודאות לא נרצה להתחיל מהן? מדוע?

רמז 3: אם נדע את הניקוד המירבי איתו אפשר להגיע למשבצות מסויימות, האם זה יעזור לנו לדעת את הניקוד המירבי איתו ניתן להגיע למשבצות אחרות? אילו משבצות נצטרך לקחת בחשבון?

בשאלה זו, כמו בשאלות רבות בתחום מדעי המחשב, אנו נדרשים למצוא דרך יעילה לנתח כמות גדולה של מידע, על מנת שנוכל לבצע אותה בזמן סביר. פעמים רבות זה ידרוש עיבוד מקדים של הנתונים, שיאפשר לאחר מכן לנתח אותם במעבר אחד פשוט ומהיר.