

מבחן מתמטי – מיון שלב ג' – הנבחרת הצעירה במדעים

כתב יוסף חפץ

8.9.20

הוראות לבחינה

- משך המבחן 105 דקות.
- אין להשתמש במחשבון או בכל אמצעי עזר אחר בזמן המבחן.
- על המבחן עונים בעט בלבד.
- במבחן 6 שאלות. יש לענות עליהן במחברת הבחינה ולהגיש אותה בסוף המבחן. אין חובה להגיש את טופס השאלות.
- המבחן קשה. לא מצופה מכם להספיק לענות על כל השאלות ולהוציא 100. כן מצופה שתעשו כמיטב יכולתכם.
- קראו תחילה את כל השאלות לפני שאתם מתחילים לפתור. התחילו בשאלות שאתם מרגישים איתן יותר בנוח.
- על השאלות יש לענות תשובות מלאות ומנומקות באופן מסודר וברור.

שאלות

שאלה 1

מצאו את המספר השלם החיובי הקטן ביותר שבחילוק ב-9 נותן שארית 7 ובחילוק ב-14 נותן שארית 5. נמקו את טענותיכם.

שאלה 2

לגיא יש מחשבון. הוא שם לב כי אם תוצאת כפל גדולה מ- 10^9 , אז המחשבון מציג E במקום תשובה מפורשת. גיא החליט לקחת 10 מספרים שלמים חיוביים $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$, לבדוק את כל המכפלות מהצורה $x_i \times y_j$, ולייצר מהם טבלת כפל 5×5 . בכל פעם שגיא קיבל E במחשבון הוא כתב E בטבלה. הטבלה נראיתה כך ללא המספרים ורק עם ה- E ים:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	E		E		E
x_2	E	E	E		
x_3	E		E		E
x_4	E				
x_5	E	E	E	E	E

האם גיא טעה בחישוביו? אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, מצאו 10 מספרים כך שהטבלה המלאה למעלה מתאימה להם.

שאלה 3

בשדה נחתו שלוש חלליות – אדומה, ירוקה וכחולה. כל אחת השאירה סימון בצורת משולש בצבע שלה בשדה. לאחר מכן התברר כי:

- השטח המשותף של הסימונים האדום והירוק הוא בצורת משולש;
- השטח המשותף של הסימונים האדום והכחול הוא מרובע;
- והשטח המשותף של הסימונים הירוק והכחול הוא מחומש.

האם השטח המשותף של כולם ביחד יכול להיות משושה? אם כן הביאו דוגמה. אם לא, הסבירו מדוע זה לא אפשרי.

שאלה 4

נתונה קבוצה של ארבעה מספרים $M = \{1, 2, 3, 4\}$. קבוצה חלקית של קבוצה נתונה היא אוסף של חלק מאיברי הקבוצה. לדוגמה: $\{1, 2, 3, 4\}$ היא קבוצה חלקית לעצמה, כך גם $\{\}$, הקבוצה ללא איברים כלל, וכך גם $\{1, 3\}$ ו- $\{1, 2, 4\}$. סך הכל, ל- M יש 16 קבוצות חלקיות (כולל M עצמה והקבוצה ללא איברים $\{\}$). **סדרו** את כל הקבוצות החלקיות של M בשורה כך שאיברים שכנים נבדלים זה מזה באיבר אחד בלבד.

לדוגמה $\{1\}$ ו- $\{1, 2, 3, 4\}$ יכולים להיות שכנים, וכך גם $\{1, 2, 4\}$ ו- $\{1, 2, 3, 4\}$, אבל $\{1, 2, 4\}$ ו- $\{1, 3\}$ לא כי מה שמבדיל ביניהם הוא יותר מאיבר בודד.

שאלה 5

מצאו את כל המספרים התלת-ספרתיים המקיימים את התנאי הבא: אם סוכמים את המספר התלת-ספרתי עם המראה שלו (המספר התלת-ספרתי שסדר הספרות שלו הפוך), מקבלים מספר שמתחלק ב-68.

שאלה 6

בכנס "אמת ושקר בחברה המודרנית" השתתפו דוברי אמת ושקרנים, שהתיישבו סביב שולחן עגול. דוברי אמת **תמיד** דוברים אמת ודוברי שקר **תמיד** משקרים. כל אחד הסתובב לאחד השכנים שלו בשולחן ואמר או "אתה דובר אמת" או "אתה שקרן". אחרי זה כתב בעיתון מקומי שאל כל אחד מהמשתתפים שתי שאלות:

1. האם השכן שלך משמאל קרא לך "שקרן"?

2. האם השכן שלך מימין קרא לך "שקרן"?

לאחר שאסף את התשובות מכל המשתתפים, גילה כי נענה "כן" בדיוק 100 פעמים (שימו לב כי מכל משתתף הוא יכול לקבל או 0 פעמים כן, או פעם אחת או פעמיים). מהו מספר השקרנים בין משתתפי הכנס? נמקו את תשובתכם.