פתרונות

1. שלישייה של משבצות שונות בלוח שח 8×8 נקראת אגדית אם לשלושתן יש קודקוד משותף. ליאור יוצר רשימה של N שלישיות אגדיות כך שלכל שתיים מהן יש משבצת משותפת אחת לכל היותר. מהו ה-N הגדול ביותר עבורו זה אפשרי?

תשובה. 49.

פתרון. בכל שלישיה אגדית יש שתי משבצות אחת מעל השנייה. מכיוון שכל זוג כזה יכול להשתייך רק לשלישייה אחת שנבחרה על ידי ליאור, זה כבר מגביל את כמות השלישיות ל-56.

בכל שתי שורות, יש 8 זוגות של משבצות אחת מעל השנייה. נוכיח שלא יתכן שליאור בחר את כולם. לכל זוג, בשביל ליצור ממנו שלישייה, צריך לצרף משבצת מצד שמאל או מצד ימין. עבור הזוג השמאלי ביותר צריכים לצרף את המשבצת בצד ימין; אבל עבור הזוג הימני ביותר צריכים לצרף משבצת מצד שמאל. אם ליאור יוצר 8 שלישיות בשתי עמודות אלה, צריך שיהיו שני זוגות סמוכים, שלשמאלי מהם מצרפים את המשבצת בצד ימין ולימני מצרפים משבצת מצד שמאל. לשתי השלישיות האגדיות שמתקבלות יש שתי משבצות משותפות.

ובכן, בכל זוג של שורות סמוכות יש 7 שלישיות אגדיות בלבד, ולכן בסה"כ יש 49 שלישיות אגדיות בלבד.

לכל בחירה של משבצת שהיא לא בעמודה הימנית ביותר ולא בשורה העליונה, ליאור יכול לרשום שלישייה כזאת: המשבצת שנבחרה, המשבצת מעליה והמשבצת מימינה. בצורה כזאת תיווצר רשימה של 49 שלישיות אגדיות שמקיימות את כל התנאים.

2. נתון משולש ABC. נסמן ב-P_{A} את הפרבולה עם מוקד A ומדריך BC. באופן דומה נגדיר פרבולות P_{B} ו-P_{C}. הראו שלכל שתיים מבין שלוש הפרבולות יש נקודה משותפת אחת לכל היותר, ואם היא קיימת אז היא נמצאת על המעגל החוסם של המשולש.

פתרון. נסמן את חוצה הזווית של הזווית C של המשולש ע"י ℓ_{C}.

כל נקודה X על P_{A} נמצאת באותו מרחק מ-A ומ-BC, כלומר X יותר קרובה ל-AC מאשר ל-BC, חוץ מנקודה יחידה שהיא החיתוך של האנך ל-AC בנקודה A עם ℓ_{C}. חוץ מהנקודה הזאת, P_{A} נמצאת באותו צד של ℓ_{C}.

באופן דומה, P_{B} נמצאת בצד האחר של ℓ_{C}. לכן לפרבולות יכולה להיות רק נקודה משותפת אחת, ונקודה זו D, אם היא קיימת חייבת להיות על ℓ_{C}, והזוויות $\measuredangle$DAC ו-$\measuredangle$DBC חייבות להיות ישרות לכן A ו-B נמצאות על המעגל שקוטרו CD, ולכן A, B, C ו-D על מעגל אחד.

3. הראו כי $\prod_{a=1151}^{1218}\left(a^4-4^a\right)$ מתחלק ב-17^{18}.

פתרון. הערכים של 4^a מודולו 17 הם $1,4,-1,-4,1,4,-1,-4,\ldots$. רואים שזה מחזורי עם מחזור 4.

הערכים של a^4 מודולו 17 הם $1,-1,-4,1,-4,4,4,-1,-1,4,4,-4,1,-4,-1,1,0$ ויש להם מחזור של 17.

לכן כאשר בוחרים a מבין $b,\ b+17,\ b+2\cdot 17,\ b+3\cdot 17$ כאשר b לא מתחלק ב-17, אז a^4 הוא מספר ספציפי מבין 1, 4, -1 או -4, בזמן ש-4^a יעבור על כל אחת מהאפשרויות אלה פעם אחת, ולכן בדיוק אחד מ-4 הגורמים יתחלק ב-17.

לכן אם a יעבור על 68 מספרים ברצף יהיו במכפלה זאת בדיוק 16 גורמים שמתחלקים ב-17. נשים לב שהחל מ-1151 ועד 1218 יש בדיוק 68 מספרים. כעת צריך להסביר שיש גם גורמים שמתחלקים ב-17^2.

נשים לב כי עבור $a=4$, המספר $a^4-4^a=4^4-4^4=0$ מתחלק ב-17^2. דבר דומה קורה עבור $a=2$. עם זאת, המספרים 4 ו-2 הם לא בטווח בין 1151 ל-1218.

הסדרה a^4 מודולו 17^2 היא מחזורית עם מחזור 17^2. הרי אם $a=b\left(\bmod 17^2\right)$, אז $a^4=b^4\left(\bmod 17^2\right)$.

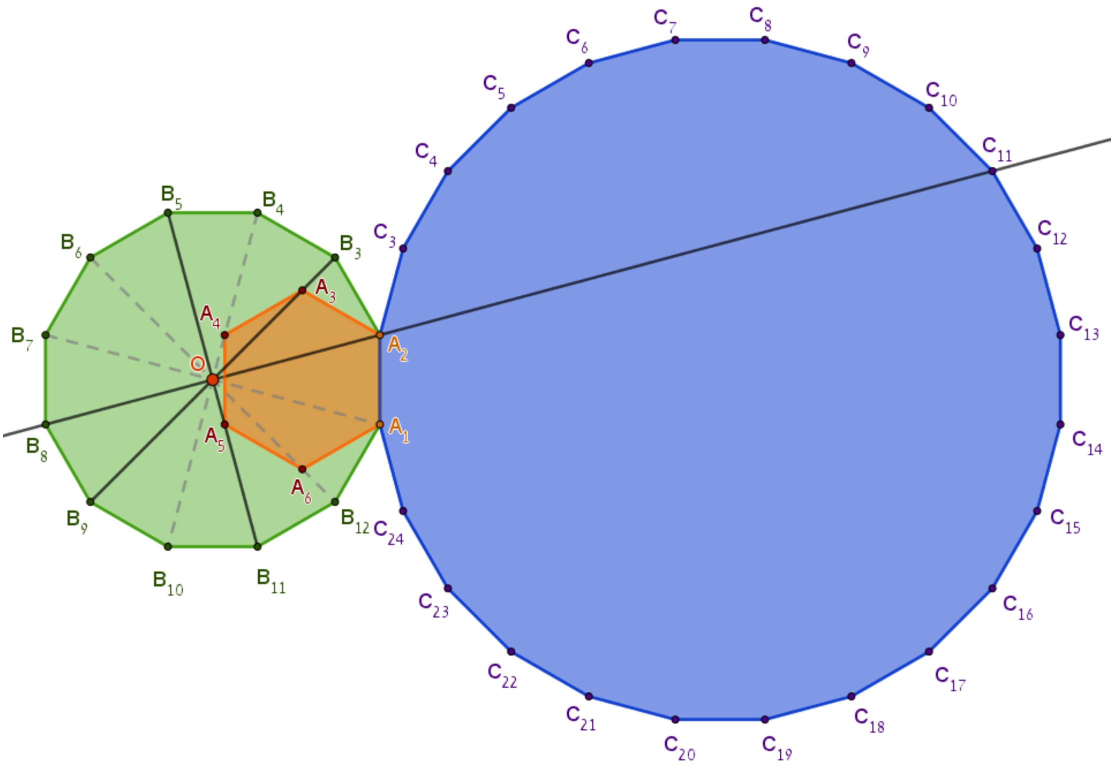
הסדרה 4^a מודולו 17^2 היא מחזורית עם מחזור $17\cdot 4$. אכן, $4^4=1(\bmod 17)$, כלומר $4^4=17\cdot k+1$, לכן

$$4^{4\cdot 17}=(1+17\cdot k)^{17}=1+\binom{17}{1}\cdot 17k+\binom{17}{2}\cdot 17^2k^2+\binom{17}{3}\cdot 17^3k^3+\ldots=$$
$$=1+17\cdot 17\cdot k+17^2\cdot m=1+17^2\cdot M$$

כלומר $4^{4\cdot 17}=1\left(\bmod 17^2\right)$.

לכן הסדרה a^4-4^a היא מחזורית עם מחזור $17^2\cdot 4$. אבל $17^2=289$ ומכאן קל לחשב כי $17^2\cdot 4=289\cdot 4=250\cdot 4+39\cdot 4=1000+156=1156$. לכן אם 2^4-4^2 וגם 4^4-4^4 מתחלק ב-17^2, כך גם 1158^4-4^{1158} ו-1160^4-4^{1160}. ובכן, במכפלה הנתונה יש 16 גרומים שמתחלקים ב-17, ומתוכם לפחות שניים מתחלקים ב-17^2, לכן המכפלה מתחלקת ב-17^{18}.

4. משושה משוכלל $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ אינו מוכל במצולע משוכלל עם 24 קודקודים $A_1A_2C_3...C_{23}C_{24}$, אבל מוכל במצולע משוכלל עם 12 קודקודים $A_1A_2B_3...B_{11}B_{12}$. הראו כי הישרים A_5B_5, A_3B_9, ו-B_8C_{11} נחתכים בנקודה אחת.



פתרון. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של $A_1A_2B_3...B_{11}B_{12}$, וב-M את אמצע הקשת A_4A_5 במעגל החוסם של $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. נשים לב כי המשולש MA_1A_2 הוא משולש שווה-שוקיים, וזווית הראש שלו M היא 30°, כי הזווית ההיקפית שווה למחצית הקשת. מצד שני גם המשולש OA_1A_2 משולש שווה שוקיים וזווית הראש שלו O גם היא 30°. לכן המשולשים OA_1A_2 ו-MA_1A_2 דומים, יש להם צלע משותפת ולכן הם חופפים, אבל גם M ו-O נמצאים באותו צד של A_1A_2 ולכן O ו-M מתלכדים.

לכן הזווית $\measuredangle A_iOA_{i+1}$ היא 30°, חוץ מ-$i=4$ ואז הזווית היא 150° אבל מכוונת לכיוון הפוך. בכל מקרה, כאשר מסובבים את הישר OA_i סביב O ב-30° בכיוון מסוים (בתמונה שלנו זה נגד כיוון השעון), מקבלים ישר OA_{i+1}. מצד שני כאשר מסובבים את הישר OB_i סביב O ב-30° מקבלים את הישר OB_{i+1}.

הישרים OB_1 ו-OA_1 הם אותו ישר, כי A_1 זה B_1. כאשר מסובבים את הישר $i-1$ פעמים סביב O ב-30° מעלות, מתקבלת המסקנה: A_i, B_i ו-O נמצאים על ישר אחד. אם מסובבים את הישר 6 פעמים נוספות סביב O מתקבלת מסקנה נוספת: A_i, B_{i+6} ו-O נמצאים על ישר אחד. לפיכך, הנקודות A_i, B_i, B_{i+6} ו-O נמצאות על ישר אחד.

בפרט, הישרים A_5B_5 ,A_3B_9, ו-A_2B_8 נחתכים ב-O. אז נותר להוכיח שההמשך של A_2B_8 עובר ב-C_{11}. במעגל החוסם של המצולע עם 12 קודקודים, $\sphericalangle A_1A_2B_8$ נשענת על קשת שמורכבת מ-5 קשתות של 30°, כלומר היא שווה ל-$5\cdot\frac{30^\circ}{2}$. במעגל החוסם של המצולע הגדול, הזווית $\sphericalangle A_1A_2C_{11}$ נשענת על 14 קשתות של 15°, כלומר היא שווה ל-$14\cdot\frac{15^\circ}{2}$. לכן $\sphericalangle A_1A_2B_8+\sphericalangle A_1A_2C_{11}=5\cdot\frac{30^\circ}{2}+7\cdot\frac{30^\circ}{2}=180^\circ$.

כלומר הקודקודים A_2, B_8 ו-C_{11} אכן נמצאים על ישר אחד.

5. הראו שלכל 3 מספרים חיוביים a, b ו-c מתקיים:

$$\frac{b+c-a}{\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}+\frac{a+c-b}{\sqrt{(b+2a)(b+2c)}}+\frac{a+b-c}{\sqrt{(c+2a)(c+2b)}}\geq 1.$$

פתרון. באופן שקול $\sum_{cyc}\frac{b+c-a}{\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}\geq\sum_{cyc}\frac{b+c-a}{a+b+c}$, או

$$\sum_{cyc}(b+c-a)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}-\frac{1}{a+b+c}\right)=$$

$$=\sum_{cyc}(b+c-a)\cdot\left(\frac{a+b+c-\sqrt{\dots}}{\sqrt{(a+2b)(a+2c)}(a+b+c)}\right)\geq 0$$

$$\sum_{cyc}(b+c-a)\cdot\left(\frac{(a+b+c)^2-(a+2b)(a+2c)}{\left(a+b+c+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\right)\cdot\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}\right)\geq 0$$

נשים לב כי $(a+b+c)^2-(a+2b)(a+2c)=(b-c)^2$, ואז נגיע ל-

$$\sum_{cyc}(b+c-a)\cdot\frac{(b-c)^2}{\left(a+b+c+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\right)\cdot\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}\geq 0$$

ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $a\geq b\geq c$. נזניח את המחובר החיובי שקשור ל-c ונחבר את שני המחוברים האחרים. כלומר מספיק להראות:

$$(b+c-a)\cdot\frac{(b-c)^2}{\left(a+b+c+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\right)\cdot\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}+$$

$$(a+c-b)\cdot\frac{(a-c)^2}{\left(a+b+c+\sqrt{(b+2a)(b+2c)}\right)\cdot\sqrt{(b+2a)(b+2c)}}\geq 0$$

ניתן גם להזניח ביטויים מהצורה c כפול שבר חיובי, ובמחובר השני, שהוא חיובי, ניתן להפוך את $(a-c)^2$ למספר יותר קטן $(b-c)^2$, כלומר מספיק להראות

$$(b-a)\cdot\frac{(b-c)^2}{\left(a+b+c+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\right)\cdot\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}+$$

$$(a-b)\cdot\frac{(b-c)^2}{\left(a+b+c+\sqrt{(b+2a)(b+2c)}\right)\cdot\sqrt{(b+2a)(b+2c)}}\geq 0$$

או באופן שקול

$$\frac{1}{\left(a+b+c+\sqrt{(b+2a)(b+2c)}\right)\cdot\sqrt{(b+2a)(b+2c)}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\left(a+b+c+\sqrt{(a+2b)(a+2c)}\right)\cdot\sqrt{(a+2b)(a+2c)}}$$

מספיק לבדוק כי $(a+2b)(a+2c)\geq(b+2a)(b+2c)$, ואז יהיה ברור שבשבר שנמצא באגף ימין המכנה גדול יותר.

$$(a+b)\left(a+\cancel{2c}\right)+b\left(\cancel{a}+2c\right)\geq(b+a)\left(b+\cancel{2c}\right)+a\left(\cancel{b}+2c\right)$$

$$(a+b)(a-b)\geq 2c\cdot(a-b)$$

וזה ברור לפי ההנחה ש-$a\geq b\geq c$.